1. Add meg az összes olyan x számot, amelyre $(x^2-13)^2+5^2=13^2$. *(2 pont)*

2. A 6********7 egy tízjegyű számot jelöl (minden csillag helyén egy számjegy áll). A következőket tudjuk róla:

- Nincs 0 számjegye.

- A számjegyei között van négyzetszám.

- Ha az első csillag helyén lévő számjegyet összeadjuk a harmadik csillag helyén lévővel, akkor éppen azt a számjegyet kapjuk, amit a második csillag jelöl.

- Bármely öt egymást követő számjegyét összeadva az eredmény 23.

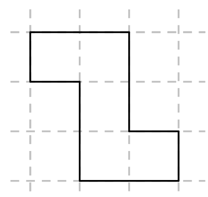
- Az ötödik csillag által jelölt számjegyből kivonva a második csillag által jelöltet éppen ugyanannyit kapunk, mintha a második csillag által jelölt számjegyből kivonnánk azt, amit az első csillag jelöl.

(a) Mennyi a szám jegyeinek az összege? *(1 pont)*

(b) Mennyit kapunk, ha a számjegyeit váltott előjellel összeadjuk? *(2 pont)*

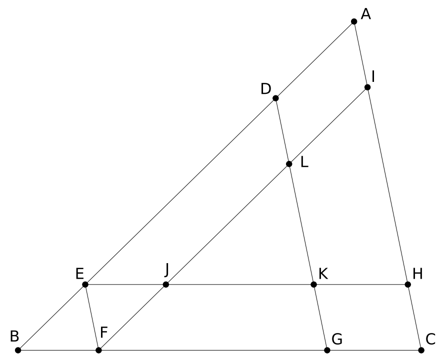
3. Adj meg három háromszöget, amiket megfelelően egymás mellé rakva kaphatunk háromszöget, négyzetet vagy konvex ötszöget is. *(3 pont)*

4. Az ábrán látható nyolcszöget két egyenes vágással vágd három darabra úgy, hogy azokból össze lehessen rakni egy négyzetet. *(3 pont)*



5. Egy csónak lebeg a tó közepén. Egy ember ül benne, akinél van egy kő. Az ember kidobja a követ, ami lesüllyed a tó fenekére. Hogy változik meg ezáltal a tó vízszintje a parthoz képest? (Nő, csökken vagy nem változik?) *(4 pont)*

6. Az ABC háromszög oldalain felvettünk két-két pontot és néhányat összekötöttünk közülük az ábrán látható módon. Tudjuk, hogy az ábrán minden szakasz párhuzamos az ABC háromszög valamelyik oldalával, továbbá azt is, hogy $JK = 11$ cm, $EB = KH = 7$ cm, $EJ = 6$ cm és $EF = 5$ cm. Hány milliméter az ABC háromszög kerülete? *(4 pont)*



7. Két különböző sűrűségű, de azonos keresztmetszetű fémpálca összehegesztésével egyetlen egyenes adott hosszúságú pálcát készítünk kétféle módon: (A) az eredeti pálcák egyforma hosszúak (B) egyforma tömegűek voltak. Melyik esetben kerül messzebb a felemás pálca tömegközéppontja a felezőpontjától? *(4 pont)*

8. Az $ABCD$ paralelogrammának megrajzoljuk a B-ből kiinduló szögfelezőjét; ez az AD szakaszt a P pontban metszi. Tudjuk, hogy $PB = PC = 6$ és $PD = 5$. Számítsuk ki az AB szakasz hosszát!

(4 pont)

9. Tudjuk, hogy a, b, c, d, e, f és g olyan nemnegatív számok, amik összege 1. Az $(a+b+c)$, $(b+c+d)$, $(c+d+e)$, $(d+e+f)$ és $(e+f+g)$ összegek közül a legnagyobb értékét jelölje M. Mi M lehető legkisebb értéke? *(4 pont)*

10. Egy asztalon 10 szalag fekszik, mindegyiknek az egyik vége a bal oldalon, másik vége a jobb oldalon lóg le. Valaki véletlenszerűen összeköti a bal oldalt lelógó végeket párosával, majd átmegy a jobb oldalra és az ott lelógó végeket is véletlenszerűen összeköti. Mennyi az esélye, hogy a szalagokból így egyetlen zárt kör jön létre? *(5 pont)*

11. (a) Falánk Manó újévi fogadalma, hogy felhagy a nevében is szereplő rossz szokásával és helyette minden reggel némi agytornával kezdi a napot. Úgy tervezi, hogy minden reggel kiszámolja, hogy az adott nap a 2015-ös évnek hanyadik napja, ebből gyököt von, elosztja 4-gyel (a tizedestört alakra kíváncsi két tizedesjegy pontossággal), majd levezetésképpen a végeredményből kivon 4-et. Év végén majd összeszorozza a kapott számokat és annyi tábla narancsos csokival jutalmazza magát, amennyi az eredmény egészrésze. Hány tábla narancsos csokira számíthat ilyen módon? *(3 pont)*

(b) Lusta Manó - mintegy szolidaritásból - úgy döntött, ő is csatlakozik Falánk Manóhoz: elvégzi minden reggel az aznapi műveletet, majd év végén annyi szem lencsét eszik, amennyi a végeredmények szorzatának egészrésze (de egy szemmel sem többet). Lusta Manó viszont nem végezte el minden nap a műveletet, egyszer egy egész (naptári) hónapig elfeledkezett róla. Ennek ellenére év végén gyomorrontást kapott a rengeteg lencsétől. Melyik hónapot felejtette ki Lusta Manó? *(2 pont)*

12. Egy buszra a végállomáson 32 utas száll fel, akik 32 különböző, egymástól 1-1 kilométerre lévő megállóig akarnak utazni. A vezető indulás előtt szavazást tart arról, hogy melyik megállókban álljanak meg. Egy általa kiválasztott sorrendben felsorolja a 32 megállót, és az utasok minden egyes megállóra külön-külön szavaznak. Egy utas egy megálló kihagyására szavaz, ha tovább akar utazni, tartózkodik, ha közelebb és csak akkor szavaz arra, hogy megálljon ott a busz, ha éppen ott kíván leszállni. Ha többen szavaznak a soron következő megálló ellen, mint mellette, akkor nem áll ott meg a busz és azok akik ott akartak volna leszállni a továbbiakban a céljukhoz legközelebbi még ki nem szavazott megállóig utaznak (ha két ilyen van, akkor a végállomáshoz közelebbit választják). Határozzuk meg, hogy (a) legalább (b) legfeljebb hány helyen áll meg a busz. *(3+3 pont)*

13. Van 14 külsőre teljesen egyforma kekszünk, amik közül 7 belsejében egy-egy darab csoki van. A csokis kekszek kicsit nehezebbek a többieknél, az egyforma típusú kekszek viszont egyforma súlyúak. Szeretnénk egy csokis kekszet kiválasztani. Ehhez az egyetlen rendelkezésre álló eszközünk a szomszédunk kétkarú mérlege, amin tetszőleges számú mérést végezhetünk a következő feltétellel: ha a mérleg egyik serpenyője lebillen, arról az oldalról véletlenszerűen kiválaszt egy kekszet és megeszi. Hogyan választhatunk ki egy csokis kekszet (épen és egészben), ha arról, hogy egy kekszben van-e csoki kizárólag a mérések segítségével szerezhetünk információt? *(6 pont)*

Kellemes fejtörést!